תרגול חזרה לבוחן מועד ב' - פיזרון מבחן. 4/5/26

שאלה מס' 1 : (23 נקודות)

תמונה

גרעין

יהי $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$ אופרטור לינארי המוגדר ע"י: $T(A)=BA$ כאשר $B\in\mathbb{R}^{2\times2}$ מטריצה נתונה.

נכון לכל B.

א. (4 נק') הוכיחו שאם B מטריצה הפיכה אז T אופרטור הפיך.

$T(A)=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}A.$

בסעיפים ב'-ה', נתון כי $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$. הת"ל מס' ב'

לא נתון

ב. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ג. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

ד. (4 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם $M\in\mathbb{R}^{2\times2}$ מטריצה הפיכה, אז $M\notin \mathrm{Im}(T)$ וגם $M\notin Ker(T)$.

ה. (5 נק') יהי $S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס סדור של $\mathbb{R}^{2\times2}$. מצאו את $[T^2]_S$.

יהי $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$ אופרטור לינארי המוגדר ע"י: $T(A)=BA$ כאשר $B\in\mathbb{R}^{2\times2}$ מטריצה נתונה.

א. (4 נק') הוכיחו שאם B מטריצה הפיכה אז T אופרטור הפיך. ← נכון לכל B.

$BA=0$ | B^{-1} משמאל

$B^{-1}BA=0$

$A=0$

פתרון: נתון: T לינארי. B הפיכה.

צ"ל: T הפיך כלומר $\ker T=\{0\}$ ו T חח"ע ועל.

נוכיח חח"ע כי $T(A)=0 \Leftarrow A=0$ כלומר $\ker T=\{0\}$.

תהי $A\in\ker T$ כלומר $T(A)=0$ נוכיח ש: $A=0$

$T(A)=0$ נתון.

$BA=0$. נתון B הפיכה כלומר קיים B^{-1}.

מהצד ימין T נקבל:

נכפול משמאל ונקבל: $B^{-1}BA=B^{-1}\cdot 0=0$ ומכאן $A=0$ לכן $\ker T=\{0\}$.

I

הוכחנו T חח"ע. אבל T אופרטור לינארי ולכן חח"ע $\Leftarrow$ על. חח"ע + על $\Leftarrow$ הפיך.

ב. (5 נקי) מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ג. (5 נקי) מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

פירוק. אם B הנ"ל $\Leftarrow$ T הנ"ל אזי

$\ker T = \{0\}$, $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow$ B בסיס $\mathbb{R}^{2\times 2}$ הוא בסיס לתמונה.

$\Uparrow$

הערה: נתון כי $r(B)=1$ לכן B לא הפיכה אבל לא נוכל להסיק ש-T הנ"ל לא מגיע למשהו בגודל תמונה.

ב. בגודל: $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש- $T(A)=0$.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

איבר בלוק לתמונה.

אלגוריתם לגז לעמודה

$$\begin{cases} a+2c=0 \\ b+2d=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-2c \\ b=-2d \end{cases} \quad (a,b,c,d) = \underline{(\ ,\ ,\ ,\ )}$$

מימד 2 כי 4 ((מימד) 1-2 משוואות $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 פולינומים

לכן איבר בלוק הבחינה: שני פולינומים מתאים כי לא סדרה לכן בסיס. מימד 2.

$\cancel{\ker T}$

$$B_{\ker T} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

בסיס לגרעין:

כי, תמונה: נמצאים אינדר כללי לתמונה, ומשם נעבור בסיס.

מימדי קבוצה מימד לפי משפט המימדים הבאים:

$$\dim \operatorname{Im} T = \dim V - \dim \ker T = 4 - 2 = \underline{\underline{2}}.$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a+2c} & b+2d \\ \boxed{2a+4c} & 2b+4d \end{pmatrix} = (a+2c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (b+2d)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\in M_{2\times 2}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

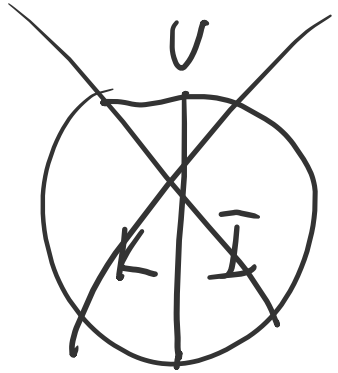
2 פולינומים מימד 2 לכן בסיס.

הערה: אם הינו מעניינים a, b, c, d הינו מקבלים 4 מטריצות שונות מאיזון $\mathbb{C}$ (כפולות של הנ"ל)

$$B_{\operatorname{Im} T} = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}}.$$

ד. (4 נקי) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה הפיכה, אז $M \notin \mathrm{Im}(T)$ וגם $M \notin Ker(T)$.

כדי לטענה בדיוק להיות מהן הוא כבתים ומי בתמונה.



אילוסטרציה

לא מספיק לבדוק רק את הבסיס לגרעין ולתמונה.

גרעין:

$$\begin{pmatrix} -bc & -bd \\ c & d \end{pmatrix}$$

אי אפשר כלל כבתים

נמצאת אבל יתכן שאחד מהם (b, c כל שהם) הפיכה. הנו עם מה בטרמינולוגיה.

$$\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דטרמינטה לכל } c,d} \begin{vmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{vmatrix} = -2cd+2cd=0$$

כלומר לכל c,d המטריצה הוא

בגדיון לכן הפיכה אינה.

אשונה לא נמוכה: $\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = 0$ לא הפיכה

$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = 0$ לא הפיכה.

בשלמן שלמן: שלבר כללי דמוקה: במקום לקבוע אבר כלי נתון ניצה

שלבר כללי חדש מהבסיס לתמונה שמקבלנו

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 2\alpha & 2\beta \end{pmatrix}$$

כאן הבנ': $\det = 2\alpha\beta - 2\alpha\beta = 0$

לסיכום אם m הפיכה אז $m \notin \ker T, \operatorname{Im} T$

ולכן הטענה נכונה.

ה. (5 נק') יהי $S = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{S_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{S_4} \right\}$ בסיס סדור של $\mathbb{R}^{2\times 2}$. מצאו את $[T^2]_S$.

$$[T^2]_S = [T]_S^{2}$$

אפשר לחשב אבל ימין אין שאלה.

הגדרה של אלכסון

$$T^2(A) = T(T(A)) = T(\underbrace{BA}_{BA}) = B(BA) = B^2A = \begin{pmatrix} 5a+10c & 5b+10d \\ 10a+20c & 10b+20d \end{pmatrix}$$

חישוב

$$T^2(A) = T(T(A)) = T(BA) = B(BA) = B^2A \overset{\text{חילוף}}{=} \begin{pmatrix} 5a+10c & 5b+10d \\ 10a+20c & 10b+20d \end{pmatrix}$$

חילוף מיצגים של: (1) מחלבה T לבסיס.

(2) קואורדינטות אמונה.

(3) קואורדינטות בתמונה:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = 5S_1 - 10S_2 + 10S_3 + 0S_4$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} = 0 \quad -5 \quad 0 \quad 10$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 10 \end{pmatrix} = 10 \quad -25 \quad 20 \quad 10$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 30 & 30 \end{pmatrix} = 0 \quad -15 \quad 0 \quad 30$$

$$[T^2]_S = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 & 0 \\ -10 & -5 & -25 & -15 \\ 10 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 30 \end{pmatrix}.$$

שאלה מס' 2 : (23 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

0, 0, 4, 4 → עילה.

מטריצה לא אלכסונית.

דרגה 2 לכן 0 מולטיפ 4-2=2 לפחות.

0, 4 עילה.

$f(\lambda) = \lambda^2(\lambda-4)^2$.

א. (5 נקי') מצאו את הפולינום האופייני של A, את הערכים העצמיים ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי. סלנדה

ב. (8 נקי') הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP = D$. לא.

ג. (6 נקי') יהי $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ אופרטור לינארי המוגדר ע"י $T(v) = Av$ (A היא המטריצה הנתונה). הוכיחו כי קיים בסיס S של $\mathbb{R}^4$ כך ש $[T]_S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

ד. (4 נקי') נסמן $B = (A-2I)^{10}$. הוכיחו כי B סקלרית.

ע"י פיתוח לפי כל שורה (עמודה)
ומציב ערכים אלו לנמ"ר.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & \lambda-3 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1-C_2 \\ C_3-C_4}}{=} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -\lambda & \lambda-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda-3 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_2+R_1 \\ R_4+R_3}}{=}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \underline{\lambda^2(\lambda-4)^2}$$

מעל ל

בס"ס	ל	ר	ס
		2	0
		2	4

רב"ש עבור 0:

$$\text{רב"ש}(\lambda) = n - r(\underline{A-\lambda I}) \underset{\lambda=0}{=} 4 - r(A) = 4-2 = 2.$$

רב"ש עבור 4

$$= 4 - r(\underline{A-4I}) =$$

$$4 - r\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \underline{4-2=2}.$$

רב"ש של 0 ושל 4 הוא 2, לכן עדיין רב"ש = רב"ר לכן לכסינה.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

מצאנו P. ו"ש.

עבור 0: נפתרו: $(A-0I)x=0$

$$Ax=0.$$

$\Downarrow$

בעזרת וקטורים עצמיים:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \leftarrow$$

עבור 4. נפתרם $(A-4I)x=0$ $\leftarrow$ $\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix}$

וקטורי השונה בשקל קבוע.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&0&3&0\\0&1&0&1\\0&-1&0&3\end{pmatrix}$$

ג. (6 נק') יהי $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ אופרטור לינארי המוגדר ע"י $T(v)=Av$ (A היא המטריצה הנתונה). הוכיחו כי קיים בסיס S של $\mathbb{R}^4$ כך ש

$$M=[T]_S=\begin{pmatrix}2&0&2&0\\0&2&0&2\\2&0&2&0\\0&2&0&2\end{pmatrix}$$

משפט A, B דומות אם"מ קיים אופרטור T כך ש A ו B מייצגים אותו.

הערה: בה"מ $T:F^n\to F^n$ שמוגדר ע"י $T(v)=Av$ מייצגים A הינו מייצג לפי סטנדרטי של F^n (בעל אורתוגונלי שלה יחידה)

לכן קיים בסיס S אם M דומה ל A ואם שניהם מייצגים לפי בסיס שונה A לפי סטנדרטי ו M לפי S (לא יכול ולא מדובר כי לא שאלו). M דומה ל A אם M דומה ל D שמבטאים קיים. ואם מטריצות יקרות A דומה ל M.

מ היא מגדיה ב ולכן ס עץ מינימלי $2=(מ)ר-ע$

ע עץ של מ כי סכום שורות היא ע(ע-1) סכום עמודות ע)

ואם לפי עקרון: $8=2\cdot 4=ת(מ)=ס+ע+ס+ס$.

$\underline{\underline{ע}}=4$.

קיבלנו, ע מינימלי $=\underline{\underline{ר}}=2$. (הגבול תחתון ב של ע).

ס " " " לכן לכל עץ מינימלי $=ר$ ו מ בודאי

לגמרי אלפסונים סז.

הערה: ס מינימלי ב לכן $ר\leq 2$.

ע מינימלי ב (קיבלנו בסעיף) ולכן $ר\geq 2$.

סכום ר גדול ע לכן $ר=2$ לכל אחד.

ד. (4 נק') נסמן $B=(A-2I)^{10}$. הוכיחו כי B סקלרית.

$B=C^{10}$

$B=(\overbrace{A-2I}^{C})^{10}$ לכן ערך עצמי של C הם: $\{0-2,0-2,4-2,4-2\}=$

$(x-2)^{10}$

$\{-2,-2,2,2\} \xRightarrow{B} (-2)^{10},(-2)^{10},2^{10},2^{10}=\alpha$

לפי משפט: לכל ערך עצמי של A עם וקטור עצמי v ו $p(x)$ פולינום כלשהו

אזי $p(\lambda)$ הוא ערך עצמי של $p(A)$ עם אותו וקטור עצמי.

אם A דומה ל D

אזי A^k דומה ל D^k. לכן $B\sim D^k=\begin{pmatrix}\alpha&&0\\&\alpha&\\0&&\alpha\end{pmatrix}$

$$P^{-1}\underline{\underline{B}}P = D' = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \alpha & & \\ & & \alpha & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I.$$

שאלה
P^{-1} ימין

$$B = PD'P^{-1} = \underbrace{P\alpha I P^{-1}}_{I} = \alpha I$$

סיבוב.

דרך נוספת:

$$A - 2I = \dots$$

תלבין ישר. נראה ל

$(A-2I)^2$ סיבוב

כי זה בריבוע מ.

שאלה מס' 3 : (34 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב.**

בשאלה זו 4 סעיפים. הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. (10 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. אם $rank(A)=n$, אז לכל $c \in \mathbb{R}^m$, למערכת $A\bar{x}=c$ יש פתרון.

$Ax=c$

$\underbrace{m\times n \quad n\times 1}$ $\quad m\times 1$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3×2

$r=n=2$.

$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad Ax=c$ אין פתרון.

נלא

+/−

נכון

הערה: אם הע נתון מלא דרגה כב כן נכון.

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$r=n$ משוואה ונעלמים

ב. (8 נקי) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ותהי $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ בלתי תלויה ליניארית, $n \geq 2$, אז

$$span\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\} \neq span\{v_2, v_3, \dots, v_n\}.$$

+/- הוכחה. נניח בשלילה שזה לא שווה ולכן $v_1 \in sp\{v_2, \dots, v_n\}$ מקיים $v_1 \in sp\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ כלומר קיים שלהם בסגירה לנורמה $\mathbb{R}$ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ תלויה.

כי המרחב הנפרש מכיל גם הקבוצה הפורשת.

ולכן לא קיים וקטור כזה שלא הוחרם.

$$v_1, \dots, v_n \in sp\{v_1, \dots, v_n\}$$

קיים פירוש

המרחב הנפרש.

משפט:

ג. (8 נקי) תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. אם $|A| = 1$ אז $adj(adjA) = A$.

נמק.

– לא בהכרח לכן נפתור סעיף ג' אחר.

ג. (8 נקי) יהיו U, V מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{R}$, ותהי $T: V \to U$ העתקה לינארית. אם $\dim Ker(T) = 2$, אז $\dim U \geq 2$.

$\dim V = \dim Ker T + \dim Im T$

0 3 2 0 1

V צר נמק.

– / + לפי משפט מימדים הנ"ל

לא חייב להיות שווה כלומר יתכן ש $\dim U < 2$

ולכן נבחר $\dim U = 1$ כדוגמא:

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$T(a,b,c) = a$

ולכן $\dim Im T = 1$, $\dim U = 1$!

הגרעין לינארי הוא $(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix})$

$\dim Ker T = 2$.

אותו T על בסיס:

מימד ה תמונה 1

ולכן הגרעין ב

$(1\ 0\ 0) \to 1$

$(0\ 1\ 0) \to 1$

$(0\ 0\ 1) \to 1$

הפתרון באמצעות מבוסס על המשפט (שלדיק לבדוק) שלפי T
מתבטא על אחרי בסיס אלא הוא מתבטא הכלה.

הבעיה לגבי נכונה ולכן יש לה הרבה בדומה נשמע כלומר למעלה
T לנשארת קיים 1 $\dim\ker T=2$ (כי נכנה תמונה) אבל $\dim U<2$.
(כבר לפחות $\dim U\geq 2$). $\dim U<2$ אחרת שווה 1. ולכן
$\dim U=3$ (לפי משפט דימנסיה השני). $U\to\mathbb{R}^3$; T ...

ד. (8 נק') אם $A, B \in F^{n\times n}$ מטריצות דומות, אז A ו- B שקולות שורה.

$\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&100\\0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ לא בדומה מאחר ואין, כולן שוות ל I.

לא נכון, דומות אינן שוות.

$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\sim D=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\sim B=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}\sim C=\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix}$

דומה

לכל שלב אינן קבועות שורות ~~אבל~~ וקבועות יש רק שורות

שלב A לכסינה אבל A דומה ל- A^t.

לכסינה: מלא, מסדר 2 עם 2 ע"ע שונים.

בקורס: יודעים לקבוע שסגי מלא דומה רק אם הן דומות לאותה אלכסונית.

" " " לא דומות אם אחת דומה לאלכסונית והשניה לא.

לא למדנו בקורס לקבוע במיון אם שתי המלא דומות לא לכסונית.

הערה: אם A ו B מקיימת את ר שמורת הכמיון זה יכול
לקרות שהכמיון לא נשמר להעלם כמיון ע"י שמירת כמיון.

אם A ו B דומות כי כה מתון, ולכן יכולים לכסינות וגם לא,
אולם לא נשמר לזמר שהן לכסינות.
אולם מה כן נשמר לזמר? אקוים P הפכה כך ש- $P^{-1}AP = B$.

סדרות: בדומה הנכסים שבתרגול מסלו ב תיקה עמ' 5
אלמדים הן כולן שייך I. כי הנכסים.

הערה נוספת: עדיין אם 0 לא יוצר כלומר A ו B ~~בלתי~~

1-0 לא יוצר אלא A ו B שווים.

שאלה נבונה מי A ו B הפירוש (0 לא יוצר) אין שוויון

אין שוויון (בלי קשר לבלתי אם לא בלתי)

כלומר איך נסדר עם הביטוי "בלתי" ובלי הביטוי "בלתי"

שאלה מס' 4 : (5 נקודות)

יהי $f(x)=x^6+ax^4+bx^3$ פולינום עם מקדמים ממשיים ו- $a,b\neq 0$, אז :

A. ל- $f(x)$ אין שורשים ממשיים פרט ל- 0. X

B. ל- $f(x)$ יש שורש ממשי חיובי.

C. אם $2+5i$ הוא שורש של $f(x)$ אז גם 4 הוא שורש של $f(x)$. X

D. אם z הוא שורש לא ממשי של $f(x)$ אז z הוא לא שורש של הנגזרת $f'(x)$. נכון.

E. ל- $f(x)$ אין שורש ממשי שלילי מריבוי 2. דרוש לדעת מי זה b.

α שורש. $2+5i$

$2-5i$ שורש.

$\alpha+2+5i+2-5i=0 \Rightarrow$

$\alpha=-4.$

מקדם x^2

$f(x)=x^3(x^3+ax+b)$

3 רמות 0.

עוד 3 שורשים

לפחות אחד ממשי.

תיאורי פרושו >0.

סימן $\in$ מכפלה

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

$\alpha,\bar{z},z$

המכפלה קשורה ל b. לא יודעת מי זה b. אבל לא יודעת מי זה השורשים הנוספים.

טענה: D נכון, f פולינום ו- α שורש מרבי k אם

$f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$, ..., $f^{(k-1)}(\alpha)=0$, $f^{(k)}(\alpha)\neq 0$.

נוסף.

מסקנה: לכל מספר טבעי יהיה מרבי 1 כי אם מרבי 2 אם

ובמילים מרבי 2 זה לא אומר כי הגזרה ב- 0 לא אפס אם הגזרה

לא שווה גם בנקודה.

$f=x^2+2x+1=(x+1)^2$.

$f(-1)=1-2+1=0$.

$f'=2x+2$. $f'(-1)=0$ ⟸ לא

1. מרבי לפחות 2.

$f''=2$ $f''(-1)=2\neq 0$

כי זו פונקציה 2.

$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim U\cap W$ משפט המימדים הראשון!

שאלה מס' 5 : (5 נקודות)

יהי W מרחב הפתרונות מעל $\mathbb{R}$ של המערכת ההומוגנית:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4-x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3-x_4-x_5=0 \end{cases}$$

2 משוואות
3 נעלמים. } מימד 3.

לנתח את U W והאיחוד.

נבדוק אם מימד

$\boxed{3+2-1=4\neq 5}$

ויהי:

$U=span\{(-1,-1,0,0,0),(1,3,2,2,2),(0,1,1,1,1)\}$ תת מרחב של $\mathbb{R}^5$.

אז:

A. $\dim W=2$.

B. $\dim U=3$.

C. $\mathbb{R}^5=W\oplus U$.

$\mathbb{R}^5 \overset{?}{=} U+W$. $\mathbb{R}^5=U+W$.

לפחות שתי U

D. אם $V=\{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\in\mathbb{R}^5 \mid a_1=a_3=a_4\}$ תת מרחב של $\mathbb{R}^5$ אז $\dim V\cap W=1$.

$(a_1\ a_2\ a_1\ a_1\ a_2)$

E. אם $V=\{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\in\mathbb{R}^5 \mid a_1=a_4=a_5\}$ תת מרחב של $\mathbb{R}^5$ אז $\dim V\cap W=1$.

$(a_1\ a_2\ a_3\ a_1\ a_1)$

a b

עלינו לבדוק שאין לפחות אחד מהם נכון.

U: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \dots \to U=span\{(1\ 0\ -1\ -1\ -1),(0\ 1\ 1\ 1\ 1)\}$.

$\Downarrow$

W פותרים מעל הזמן.

$(a,b,-a+b,-a+b,-a+b)$.

יצוג קנוני.

איך נראה U:

נקח וקטור כללי ב U:

$(a, b, -a+b, -a+b, -a+b)$

ונבדוק אם הוא ב W:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{a} - b + (\cancel{-a} + b) + (\cancel{-a} + b) - (\cancel{-a} + b) = 0$$

$$a + b - (-a + b) - (-a + b) - (-a + b) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{array}\right\}$$

$$b = 2a$$

לכן $b = 2a$ נקבל וקטור כללי בתת המרחב. אפשר לכן לרשום סיס ישר ב-U.

$(a, 2a, a, a, a)$

שאלה מס' 6 : (5 נקודות)

יהי $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ אופרטור לינארי.

אם $\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של T עם ערך עצמי $\lambda_1 = 3$ ו- $\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של T עם ערך עצמי $\lambda_2 = -2$, אז $T\begin{pmatrix}4\\2\\13\end{pmatrix}$ שווה ל:

$$T\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\3\\12\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-10\end{pmatrix}$$

לפי מאפיין הלינאריות.

A. $\begin{pmatrix}1\\1\\9\end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix}7\\3\\17\end{pmatrix}$; C. $\begin{pmatrix}26\\6\\24\end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix}13\\3\\2\end{pmatrix}$; E. $\begin{pmatrix}22\\6\\14\end{pmatrix}$

ניתן להשיג $T\begin{pmatrix}4\\2\\13\end{pmatrix}$ רק אם $\begin{pmatrix}4\\2\\13\end{pmatrix}$ הינו צירוף לינארי של $\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}$.

תשובה:

$$\begin{pmatrix}4\\2\\13\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}4\\2\\13\end{pmatrix} = 2T\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} + 1T\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix} =$$

$$2\begin{pmatrix}9\\3\\12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}22\\6\\14\end{pmatrix}$$

שאלה מס' 7 : (5 נקודות)

נתון כי המטריצה $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ b & 4 & -4 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix}$ דומה למטריצה $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, אזי $a+b+c$ שווה ל-:

A. 2 ; B. 3 ; C. 4 ; D. 1 ; E. 0

$(\lambda-2)^2(\lambda-1)$.

$A-2I=$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ b & 2 & -4 \\ 1 & c & -2 \end{pmatrix}$$

$-1,-2=b \Rightarrow b=2$

$c=+1$

$a+b+c=$

$1+2+1=4$

$\overbrace{a+4}^{A}=\overbrace{5}^{B}$

$a=1$.

המ"ל דומות לכן עליה יקרה:

$3-r(A-2I)=2$

$|B|=2\cdot 2=4$.

$3-r(B-2I)$

$$3-r\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}=3-1=2$$

2 ע"ע של B, ל"ב:

2 מרחבים עצמיים.

(ל"ב=2 ב B לכן ב A)